Przestrzenie Sobolewa – przegląd własności

Zadanie 1. Wykazać, że $W^{m,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha dla dowolnego wykładnika $1 \leqslant p \leqslant \infty$, a w przypadku $1 < p < \infty$ nawet refleksywną. *Wskazówka.* Rozważyć izometryczne włożenie $W^{1,p}$ w L^p zadane przez $u \mapsto (u, \nabla u)$.

Zadanie 2. Sprawdzić, że jeśli $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ oraz $\nabla u \equiv 0$, to funkcja u jest lokalnie stała.

Zadanie 3. Sprawdzić, dla jakich p funkcja $u(x) = \frac{x}{|x|}$ należy do $W^{1,p}(\mathbf{B}^n_1)$.

Zadanie 4. Dla przekształceń w $\mathbb{S}^2$ (i ogólnie, w podrozmaitości $\mathbb{R}^N$) definiujemy $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$ jako te funkcje $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, dla których $|u| = 1$ p.w. Wykazać, że funkcje gładkie nie są gęste w $W^{1,2}(\mathbf{B}^3_1, \mathbb{S}^2)$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję $u(x) = \frac{x}{|x|}$ i zwrócić uwagę na stopień u po obcięciu do sfer wokół zera.

Zadanie 5. Pokazać, że

- $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ jest gęste w $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,
- $C^\infty_c(\mathbf{B}_1)$ nie jest gęste w $W^{1,p}(\mathbf{B}_1)$ (rozważyć funkcję stale równą 1),
- $C^\infty(\overline{\Omega})$ w ogólności nie musi być gęste w $W^{1,p}(\Omega)$.

Zadanie 6. Sprawdzić, że złożenie $v = f \circ u$ funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ z funkcją $f \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ o ograniczonej pochodnej również leży w $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$, ponadto $\nabla v(x) = \nabla f(u(x)) \cdot \nabla u(x)$.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$, to również $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ oraz zachodzi wzór $\nabla |u| = \operatorname{sgn} u \nabla u$ w następującym sensie:

$$\nabla |u|(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{gdy } u(x) > 0, \\ -\nabla u(x) & \text{gdy } u(x) < 0, \\ 0 & \text{gdy } u(x) = 0. \end{cases}$$

Wywnioskować, że dla dowolnych $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ funkcje $\max(u, v)$, $\min(u, v)$ również należą do $W^{1,p}(\Omega)$.
Wskazówka. Rozważyć złożenie u z $f_\varepsilon(x) = (\varepsilon^2 + |x|^2)^{1/2} - \varepsilon$.

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega)$, to $\nabla u(x) = 0$ dla p.w. x ze zbioru $\{u(x) = 0\}$.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i $k = 1, \ldots, n-1$, to funkcja $u_y = u|_{\mathbb{R}^k \times \{y\}}$ należy do $W^{1,p}(\mathbb{R}^k \times \{y\}$ dla prawie każdego $y \in R^{n-k}$, ponadto pochodne u_y zgadzają się z obcięciami pochodnych u.